USO DELLA "RATIONAL APPROXIMATION" NEL CALCOLO DEI CAMPI IRRADIATI DAL FULMINE

Paolo Molfino, Giorgio Molinari, Mansueto Rossi

DINAEL, Università di Genova
Via Opera Pia 11A, 16145, Genova

Uno degli aspetti connessi alla modellista del fulmine e, di conseguenza, alla quantificazione delle sovratensioni indotte dal campo elettrico da esso irradiato sulle linee di trasmissione, è la valutazione dell'influenza della conducibilità finita del terreno. Un metodo tra i più diffusi per tenere conto (in maniera approssimata) di questo fattore nel calcolo della componente radiale E_r del campo elettrico è la formula di Cooray-Rubinstein [1]:

$$E_r(\omega, z, r) = -H_{\varphi i}(\omega, 0, r) \times Z(\omega) + E_{ri}(\omega, z, r) \qquad (1)$$

dove $H_{\varphi i}$ ed E_{ri} sono le componenti azimutale e radiale dei campi magnetico ed elettrico, calcolate in condizioni ideali, cioè considerando il terreno conduttore perfetto, mentre l'impedenza superficiale $Z(\omega)$ vale:

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{j\omega\varepsilon + \sigma}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{j\omega}{j\omega + \sigma/\varepsilon}} = \eta\sqrt{\frac{j\omega\tau_G}{j\omega\tau_G + 1}} \qquad (2)$$

essendo σ, ε, μ_0 e η rispettivamente conducibilità, costante dielettrica, permeabilità (assunta pari a quella del vuoto) ed impedenza caratteristica del terreno, ed avendo posto $\tau_G = \varepsilon/\sigma$.

Utilizzando un'approssimazione razionale (RA, Rational Approximation, [2]) per $z(\omega')$:

$$z(\omega') = \sqrt{\frac{j\omega'}{j\omega' + 1}} \approx 1 + \sum_{k=1}^{N_{RA}} \frac{r_k}{j\omega' - a_k} \qquad (3)$$

(1) può essere approssimata come:

$$\begin{cases} E_{CR}(\omega, z, r) = -\eta H_{\varphi i}(\omega, 0, r) - \eta \sum_{k=1}^{N_{RA}} \dfrac{r_k H_{\varphi i}(\omega, 0, r)}{j\omega\tau_G - a_k}, \\ E_r(\omega, z, r) = E_{ri}(\omega, z, r) + E_{CR}(\omega, z, r) \end{cases} \qquad (4)$$

avendo indicato con E_{CR} il "termine correttivo" rispetto al campo ideale. La RA in (3) può essere calcolata grazie al Vector Fitting (VF) [2]; essa non dipende dai valori di σ ed ε, per cui i relativi coefficienti valgono in generale. Riformulando (1) come in (4), E_{CR} può essere calcolato nel dominio del tempo in modo semplice ed efficiente mediante la teoria dei filtri digitali, utilizzando algoritmi basati sulla "recursive convolution" e facendo uso di tecniche di discretizzazione quali la "zero-order hold" (zoh) e la "first-order hold" (foh). In Fig.1 i risultati ottenuti con queste due discretizzazioni, a partire da un campionamento nel tempo del campo magnetico, sono confrontati con un calcolo eseguito applicando una FFT allo stesso set di valori, moltiplicando il risultato per $Z(\omega)$ e applicando infine una IFFT: il metodo proposto consente una riduzione dei tempi di calcolo tra uno e due ordini di grandezza. Nell'esempio, la corrente alla base del canale $i_0(t)$ è data dalla somma di due funzioni di Heidler, con parametri tipici di un "subsequent stroke" [3].

Un'altra possibile applicazione della RA in questo contesto è il calcolo di una espansione in serie di Prony per $i_0(t)$, a partire da note espressioni analitiche quali la citata funzione di Heidler, oppure da misure sia effettuate presso torri strumentate, sia riguardanti fulmini "triggerati". Una serie di Prony è una espressione del tipo:

$$i_0(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n e^{p_n t} \tag{5}$$

nella quale i poli p_n ed i residui r_n possono essere reali o complessi coniugati. Questa interpolazione per $i_0(t)$ può essere ricavata ancora mediante il VF, nella sua variante nel dominio del tempo presentata in [4] e opportunamente adattata con l'aggiunta dei vincoli:

$$i_0(0) = \sum_{n=1}^{N} r_n = 0 \quad i_0'(0) = \sum_{n=1}^{N} p_n r_n = 0 \tag{6}$$

per garantire che la corrente e la sua derivata prima siano nulle nell'origine.

Uno dei principali vantaggi derivanti dall'utilizzo di questa interpolazione può essere riscontrato nel calcolo delle componenti del campo elettromagnetico irradiato dal fulmine: mediante opportune manipolazioni, esse possono infatti essere espresse come somme di integrali di convoluzione del tipo:

$$F(t) = \int_0^t \tilde{g}(\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{7}$$

dove $\tilde{g}(\tau)$ è una opportuna funzione e $f(\cdot)$ rappresenta i_0, la sua derivata o il suo integrale; se queste funzioni sono espresse mediante serie di Prony, tali integrali possono essere calcolati in modo semplice ed efficiente mediante le già citate tecniche di recursive convolution e filtraggio digitale. In Fig.2 è riportato un esempio di interpolazione della espressione ottenuta dalla dalla somma di due funzioni di Heidler, menzionata in precedenza.

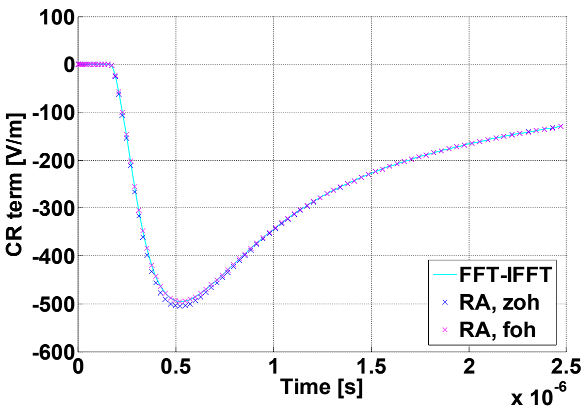

Figura 1- Termine di Cooray-Rubinstein: 50 m dal canale di scarica, $\sigma = 0.01$ S, $\varepsilon_r=10$.

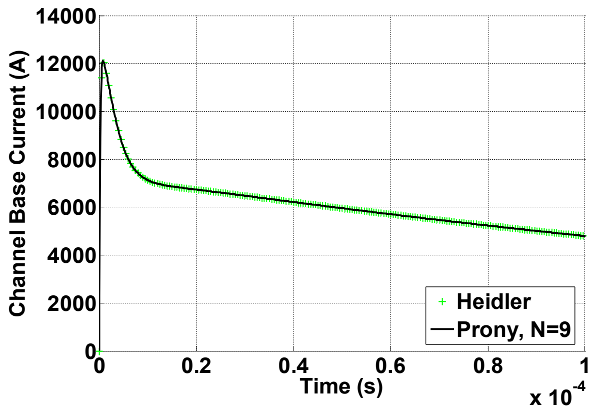

Figura 2- Interpolazione di una corrente analitica.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Rubinstein, "An approximate formula for the calculation of the horizontal electric field from lightning at close, intermediate and long range", *IEEE Trans. on EMC*, **38**, pp. 531-535 (1996)

[2] B. Gustavsen e A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by Vector Fitting", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, n. 3, pp. 1052-1061, July 1999.

[3] F. Delfino, P. Girdinio, R. Procopio, M. Rossi, and F. Rachidi "Time Domain Implementation of Cooray-Rubinstein Formula via Convolution Integral and Rational Approximation," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, accettato per la pubblicazione.

[4] S. Grivet-Talocia, "The Time-Domain Vector Fitting Algorithm for Linear Macromodeling", *AEÜ International Journal of Electronics and Communications*, vol. 58, pp. 293–295, Nov. 2004.